TD$_{18}$ – Géométrie du plan et de l'espace

Exercice 1 ★

Dans le plan $\mathcal{P}$ donner, pour chacune des droites suivantes :
- Un vecteur directeur
- Un vecteur normal
- Une représentation paramétrique
- Une équation cartésienne

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A(1,0)$ et $B(-2,-3)$
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $3x+2y=5$
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par $C(-1,1)$ et de vecteur directeur $-3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par $D(0,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.

Exercice 2 ★

Soit $(\mathcal{C})$ l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $x^2+y^2-2x-4y+1=0$.
1. Montrer que $(\mathcal{C})$ est un cercle et donner son centre et son rayon.
2. Déterminer les tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par $A(-1,0)$

Exercice 3 ★

On se place dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Donner
1. Une base du plan $\mathcal{P}_1$ passant par les points $A(3,1,0)$, $B(2,2,2)$ et $C(-1,5,0)$. En déduire une représentation paramétrique de ce plan
2. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$ passant par $A(0,1,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}=-2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.
3. Un équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$ passant par $A(1,1,0)$ et admettant pour base $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}=3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$. Donner un vecteur normal de $\mathcal{P}_3$.

Exercice 4 ★

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $D=\{(2-2t,1+t,t)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$ et $D'=\{(-1+t,2-3t,a+2t)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$.
1. D et D' sont-elles parallèles ?
2. Déterminer a pour que D et D' soient sécantes.
3. Déterminer alors une équation cartésienne du plan contenant D et D'.

Exercice 5 ★

On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Soit D_1 la droite d'équation cartésienne $x+2y-3=0$, D_2 la droite d'équation cartésienne $2x+3y-5=0$ et soit $A(-1,-1)$ et $B(1,4)$.
1. Déterminer une équation de la droite parallèle à D_1 passant par A.
2. Déterminer une équation de la droite perpendiculaire à D_2 passant par B.

Exercice 6 ★

Soit $A(1,-1,-1)$, $B(3,2,1)$ et $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$. On note D la droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Trouver une équation cartésienne du plan P contenant le point A et la droite D.

Exercice 7 ★

On considère le vecteur $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et les deux droites

$$D_1\ :\ \begin{cases} y=0\\ z=1\end{cases} \qquad D_2\ :\ \begin{cases} x=1\\ z=0\end{cases}$$

Déterminer la droite Δ dirigée par $\overrightarrow{u}$ et qui coupe D_1 et D_2.

Exercice 8 ★

Soit C le cercle passant par les points $A(1,-2)$, $B(4,2)$ et $C(1,4)$.

1. Déterminer le centre et le rayon de C.
2. Donner une équation cartésienne de C.

Exercice 9 ★

Soit P le plan d'équation $x+y+z=1$ et P' le plan d'équation $x=y$. Soit $A(1,2,3)$. Déterminer les distances $d(A,P)$, $d(A,P')$ et $d(A,P\cap P')$.

Exercice 10 ★★

Dans le plan affine euclidien, soit $D : y=2x+1$, $D' : y=2x+7$ et $D'' : y=-\dfrac{x}{2}$.
Déterminer tous les cercles tangents simultanément à D, D' et D''.

Exercice 11 ★

Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on définit la droite du plan D_λ d'équation : $(1-\lambda^2)x+2\lambda y+(\lambda^2-2\lambda-3)=0$.

1. Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe (au moins) une droite D_λ.
2. Déterminer l'ensemble des points M par lesquels il passe deux droites D_λ et D_μ perpendiculaires.

Exercice 12 ★★

Soit D la droite d'équation $y=x-1$ et $M_0(x_0,y_0)$ un point du plan.

1. Déterminer les coordonnées des symétriques M_1, M_2 et M_3 de M_0 par rapport à D, (Ox) et (Oy).
2. Déterminer l'ensemble (E) des points M_0 tels que M_1, M_2 et M_3 sont alignés.

Exercice 13 ★★

Déterminer l'équation de la sphère contenant les cercles d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ z=2. \end{cases}$$

Exercice 14 ★★

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit D la droite passant par le point $A(1,1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1,2,1)$. Soit P le plan d'équation $2x+y-z-3=0$.

1. Montrer que D n'est pas orthogonale à P.
2. Déterminer une équation du plan P' contenant D et perpendiculaire à P.

Exercice 15 ★★★

Soit (ABC) un triangle équilatéral du plan, et soit M un point variable décrivant l'intérieur de ce triangle. Montrer qu'alors, la somme des distances de M aux côtés de ce triangle reste constante.

Exercice 16 ★

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x+2y-z-3=0$ et la droite d'équation

$$\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

Déterminer la droite D' symétrique de D par rapport au plan P.

Exercice 17 ★★★

On considère la famille de droite $(D_\lambda)_{\lambda\in[0,1]}$ d'équations respectives $D_\lambda : (1-\lambda)x+\lambda y-\lambda(1-\lambda) = 0$.

Déterminer une enveloppe de cette famille de droite.

Exercice 18 ★★★

Dans le plan affine euclidien, on considère deux demi-droites orthogonales D et D' de même origine O, et des points M et M' respectivement sur D et D' tels que l'aire du triangle OMM' soit égale à un réel strictement positif donné a^2. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites (MM') lorsque M décrit D.

Exercice 19 ★★★

Soit D une droite du plan et A un point hors de D. Déterminer l'enveloppe de la normale en M à (AM) lorsque M parcourt D.

Exercice 20 ★★★

Soit quatre points $A(1,2,3)$, $B(2,3,1)$, $C(3,1,2)$ et $D(1,0,-1)$. Déterminer, en justifiant son existence, le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Exercices issus d'oraux

Exercice 21 ★★★
(*Oral 2008*)

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle centré au point $A(1,0)$ et de rayon 2.

Déterminer et étudier l'ensemble des centres des cercles $(\mathcal{C}')$ tangents à $(\mathcal{C})$ et à la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $x=0$.

Exercice 22 ★★★
(*Oral 2013*)

Soit A, B et C trois points non alignés du plan affine euclidien.

1. Soit M un point du plan. Montrer que
$$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}\rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CA}\rangle + \langle \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB}\rangle = 0$$
2. Montrer l'existence et l'unicité de l'orthocentre H du triangle ABC.
3. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. Montrer que ce point est le centre de gravité du triangle ABC
4. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC Trouver le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
5. Montrer que O, H et G sont alignés.

Exercice 23 ★★
(*Oral 2017, 2019*)

Dans le plan on considère le point $A(2,3)$ et le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2+y^2-2x+\dfrac{4}{5}=0$

Trouver les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par A.

Exercice 24 ★★★
(*Oral 2017*)

Dans le plan on considère deux points $M(0,y_M)$ et $N(x_N,0)$ avec $2y_M = 2-x_N$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
2. Déterminer et étudier l'enveloppe de la famille des droites (MN).
3. Que représente cette enveloppe ?

Exercice 25 ★★★
(*Oral 2018*)

Soit C un cercle du plan et soit A un point fixe du cercle. On note H le projeté orthogonal de A sur la tangente au cercle en M.

1. Paramétrer le problème.
2. Déterminer les points M et N de C pour lesquels l'aire de MNH est maximale.

Exercice 26 ★★
(*Oral 2018*)

Soit C le cercle de centre $(2,0)$ et de rayon 1. Soit D la droite d'équation $x=0$.

Déterminer et représenter le lieu des centres des cercles tangents à C et à D.

Exercice 27 ★★★
(*Oral (2024)*)

Pour $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ on définit $C(t)$ de coordonnées $(\cos(t),\sin(t))$ et D_t l'image de la droite parallèle à l'axe des abscisse passant par $C(t)$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(OC(t))$

1. Donner un vecteur directeur de D_t et une représentation paramétrique
2. Déterminer l'enveloppe des droites $(D_t)_{t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$
3. Tracer cette enveloppe

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par $A(1,0)$ et $B(-2,-3)$.
   $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$. $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$.
   Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_1$ est
   $$\mathcal{D}_1 = \{(1-3t, -3t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
   Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ est
   $$\mathcal{D}_1\ :\ x - y = 1$$
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $3x + 2y = 5$
   Remarquons que $E(1,1) \in \mathcal{D}_2$. $\overrightarrow{n} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_2$. $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.
   Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_2$ est
   $$\mathcal{D}_1 = \{(1-2t, 1+3t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par $C(-1,1)$ et de vecteur directeur $-3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$
   $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_3$.
   Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_3$ est
   $$\mathcal{D}_3 = \{(-1-3t, 1+t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
   Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_3$ est
   $$\mathcal{D}_3\ :\ x + 3y = 2$$
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par $D(0,2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
   $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_4$.
   Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_4$ est
   $$\mathcal{D}_4 = \{(t, 2-t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
   Une équation cartésienne de $\mathcal{D}_4$ est
   $$\mathcal{D}_4\ :\ x + y = 2$$

Corrigé de l'exercice 2

1. On a
   $$\begin{aligned} M(x,y) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{aligned}$$
   Ainsi M appartient à $(\mathcal{C})$ si et seulement si M appartient au cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 2. $(\mathcal{C})$ est donc le cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 2.

2. A est à l'extérieur du disque de centre Ω et de rayon 2. Par A passent donc deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ qui touchent $(\mathcal{C})$ en B et C. Les triangles ΩAB et ΩAC sont alors rectangles en respectivement B et C. ΩA est l'hypoténuse de ces deux triangles. Ainsi B et C sont sur le cercle centré au milieu de ΩA et de rayon $\dfrac{\Omega A}{2}$, c'est-à-dire le cercle de centre $I(0,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. Les coordonnées de B et C vérifient alors les deux équations
$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y+1=0 \\ x^2+y^2-2y-1=0 \end{cases}$$
D'où
$$\begin{cases} -2x-2y+2=0 \\ x^2+y^2-2y-1=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=1-y \\ y^2-2y+1+y^2-2y-1=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x=1-y \\ 2y(y-2)=0 \end{cases}$$
D'où $(x,y)=(1,0)$ ou $(x,y)=(-1,2)$. D'où $B(1,0)$ et $C(-1,2)$. Les deux tangentes sont alors la droite $T_1=(AB)$ d'équation $y=0$ et la droite $T_2=(AC)$ d'équation $x=-1$.

Corrigé de l'exercice 3

1. A, B et C ne sont pas alignés car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Une base de $\mathcal{P}_1$ est $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}$. On en déduit une représentation paramétrique de $\mathcal{P}_1$
$$\mathcal{P}_1=\{(3-t-4s,1+t+4s,2t)\ ,\ (t,s)\in\mathbb{R}^2\}$$
2. $\mathcal{P}_2$ admet pour équation cartésienne
$$\mathcal{P}_2\ :\ -2x+y+z=1$$
3. $\mathcal{P}_3$ contient les points $A(1,1,0)$, $B=A+\overrightarrow{u}=(2,2,0)$ et $C=A+\overrightarrow{v}=(4,1,1)$. Un équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$ est de la forme $ax+b+y+cz=d$. On a alors
$$\begin{cases} a+b=d \\ 2a+2b=d \\ 4a+b+c=d \end{cases}$$
D'où
$$\begin{cases} d=0 \\ a=-b \\ c=-3a \end{cases}$$
Ainsi $x-y-3z=0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{P}_3$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_3$.

Corrigé de l'exercice 4

1. D admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{u}=-2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et D' admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$. D et D' sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u}=t\overrightarrow{v}$, i.e. tel que $-2=t$, $1=-3t$ et $1=2t$, ce qui est clairement impossible. Ainsi D et D' ne sont pas parallèles.
2. D et D' sont sécantes s'il existe $t\in\mathbb{R}$ et $s\in\mathbb{R}$ tels que
$$(2-2t,1+t,t)=(-1+s,2-3s,a+2s)$$

C'est-à-dire, si le système suivant admet une solution

$$(S)\ :\ \begin{cases} s+2t=3 \\ 3s+t=1 \\ -2s+t=a \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$(S)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} s+2t=3 \\ -5t=-8 \\ 5t=a+6 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$L_2 \leftarrow -\dfrac{1}{5}L_2$

$$(S)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} s+2t=3 \\ t=\dfrac{8}{5} \\ 0=a-2 \end{cases}$$

Le système est compatible si et seulement si $a=2$ auquel cas D et D' sont sécantes en $M\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{13}{5},\dfrac{8}{5}\right)$.

3. Le plan P contenant D et D' admet comme base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, on va donc trouver un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

   $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ convient. P est donc le plan d'équation $x+y+z=3$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Notons D_3 la droite parallèle à D_1 passant par A. D_3 admet pour vecteur normal tout vecteur normal à D_1. Ainsi $\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à D_3.

   On en déduit que D_3 admet pour équation cartésienne $x+2y=-3$.
2. Notons D_4 la droite perpendiculaire à D_2 passant par B. D_4 admet pour vecteur normal tout vecteur directeur à D_1. Ainsi $3\overrightarrow{i}-2\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à D_4.

   On en déduit que D_4 admet pour équation cartésienne $3x-2y=-5$.

Corrigé de l'exercice 6

Il nous faut trouver un vecteur normal à P. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u})$ est une base de P. Il nous faut donc trouver un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$. On constate que $n=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$ convient. Ainsi P est le plan d'équation $x-z=0$.

Corrigé de l'exercice 7

Soit $M(x_M,y_M,z_M)$ un point de Δ. Une représentation paramétrique de Δ est donc

$$\Delta=\{(x_M+t,y_M-t,z_M+t)\ ,\ t\in\mathbb{R}\}$$

Δ coupe D_1, ainsi il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $y_M-t=0$ et $z_M+t=1$, d'où $y_M=1-z_M$.

De même Δ coupe D_2, ainsi il existe $s\in\mathbb{R}$ tel que $x_M+s=1$ et $z_M+s=0$, d'où $z_M=x_M-1$.

Ainsi un point M appartient à Δ si et seulement si $y_M=1-z_M$ et $z_M=x_M-1$. Δ est donc la droite d'équation

$$\Delta\ :\ \begin{cases} y+z=1 \\ x-z=1 \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 8

1. Le cercle C est le cercle circonscrit au triangle ABC, son centre est donc le point de concourance des médiatrices du triangle ABC. La médiatrice du segment $[AC]$ est la droite d'équation $y = 1$ et la médiatrice du segment $[AB]$ est la droite d'équation $3x + 4y = \frac{15}{2}$. Leur intersection est le point $\Omega\left(\frac{7}{6}, 1\right)$. Le rayon du cercle est la longueur ΩA, c'est-à-dire $\frac{5\sqrt{13}}{6}$.
2. Un équation cartésienne de C est alors

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{3625}{36}$$

Corrigé de l'exercice 9

Il nous faut déterminer les projetés orthogonaux de A sur P, P' et $P \cap P'$.

Le projeté orthogonal de A sur P est l'unique point H_1 de P tel que

$$\forall M \in P \quad \langle \overrightarrow{H_1M}, \overrightarrow{H_1A} \rangle = 0$$

C'est également l'intersection de P et de la droite perpendiculaire à P passant par A. La dite perpendiculaire D_1 est dirigée par $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et admet donc comme représentation paramétrique

$$D_1 = \{(1+t, 2+t, 3+t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que H_1 ait pour coordonnées $(1+t, 2+t, 3+t)$. Comme $H_1 \in P$ on a de plus $1+t+2+t+3+t = 1$ d'où $t = -\frac{5}{3}$. Ainsi H_1 est le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

On sait que la distance $d(A, P)$ est égale à la longueur AH_1. Ainsi

$$d(A,P) = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Le projeté orthogonal de A sur P est l'unique point H_2 de P' tel que

$$\forall M \in P' \quad \langle \overrightarrow{H_2M}, \overrightarrow{H_2A} \rangle = 0$$

C'est également l'intersection de P' et de la droite perpendiculaire à P' passant par A. La dite perpendiculaire D_2 est dirigée par $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ et admet donc comme représentation paramétrique

$$D_1 = \{(1+t, 2-t, 3)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que H_2 ait pour coordonnées $(1+t, 2-t, 3)$. Comme $H_2 \in P'$ on a de plus $1+t = 2-t$ d'où $t = \frac{1}{2}$. Ainsi H_2 est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$.

On sait que la distance $d(A, P')$ est égale à la longueur AH_2. Ainsi

$$d(A,P') = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Enfin le projeté orthogonal de A sur $P \cap P'$ est l'unique point H_3 de $P \cap P'$ tel que

$$\forall M \in P \cap P' \quad \langle \overrightarrow{H_3M}, \overrightarrow{H_3A} \rangle = 0$$

La droite $P \cap P'$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ et passe par le point de coordonnées$(0,0,1)$. On a ainsi une représentation paramétrique de $P \cap P'$

$$P \cap P' = \{(t, t, 1-2t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Il nous faut alors déterminer t_0 tel que H_3 ait pour coordonnées $(t_0, t_0, 1 - 2t_0)$. La condition $\forall M \in P \cap P' \quad \langle \overrightarrow{H_3M}, \overrightarrow{H_3A} \rangle$ se réécrit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (t - t_0) \times (1 - t_0) + (t - t_0) \times (2 - t_0) + (2t_0 - 2t) \times (3 - 1 + 2t_0) = 0$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (t - t_0)(-1 - 6t_0) = 0$$

D'où $t_0 = -\dfrac{1}{6}$ et H_3 admet pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{4}{3}\right)$.

On sait que la distance $d(A, P \cap P')$ est égale à la longueur AH_3. Ainsi

$$d(A, P \cap P') = \frac{\sqrt{318}}{6}$$

Corrigé de l'exercice 10

— Si un cercle (C) de centre Ω et de rayon R convient, alors notons H, H' et H'' les points de contacts de (C) avec les droites D, D', D'' respectivement.

On a D et (ΩH) sont perpendiculaires donc H est le projeté orthogonal de Ω sur D, d'où $\Omega H = d(\Omega, D)$

De même $\Omega H' = d(\Omega, D')$ et $\Omega H'' = d(\Omega, D'')$

Réciproquement, si on dispose d'un cercle de centre Ω qui passe par le point $M \in D$ tel que $OM = d(\Omega, D)$, alors M est le projeté orthogonal de Ω sur D et donc D et (ΩH) sont perpendiculaires, ce qui prouve que D est tangente au cercle.

Ainsi les cercles solution seront exactement ceux dont le centre est à égale distance de D, D' et D'', et de rayon cette distance commune.

— Un point Ω de coordonnées (a, b) est équidistant de D, D' et D'' si et seulement si

$$\begin{cases} d(\Omega, D) = d(\Omega, D') \\ d(\Omega, D') = d(\Omega, D'') \end{cases}$$

Le projeté orthogonal de Ω sur D est l'unique point H de D tel que D et (ΩH) sont perpendiculaires. En notant (x, y) ses coordonnées on doit donc avoir $y = 2x + 1$ et $\begin{vmatrix} x - a & -2 \\ y - b & 1 \end{vmatrix} = 0$.

On en déduit que H a pour coordonnées $\left(\dfrac{-2 + a + 2b}{5}, \dfrac{1 + 2a + 4b}{5}\right)$ et donc

$$d(\Omega, D)^2 = \|\overrightarrow{\Omega H}\|^2 = \frac{(-2 - 4a + 2b)^2}{25} + \frac{(1 + 2a - b)^2}{25} = \frac{1 + 4a - 2b - 4ab + 4a^2 + b^2}{5} = \frac{(b - 2a - 1)^2}{5}$$

On détermine de manière similaire les distances de Ω à D' et D''.

La première équation de notre système s'écrit alors

$$\frac{|b - 2a - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|b - 2a - 7|}{\sqrt{5}} \iff b - 2a - 1 = b - 2a - 7 \text{ ou } b - 2a - 1 = -b + 2a + 7$$

La première égalité est toujours fausse donc cette première équation est équivalent à $b = 2a + 4$

La deuxième équation du système est

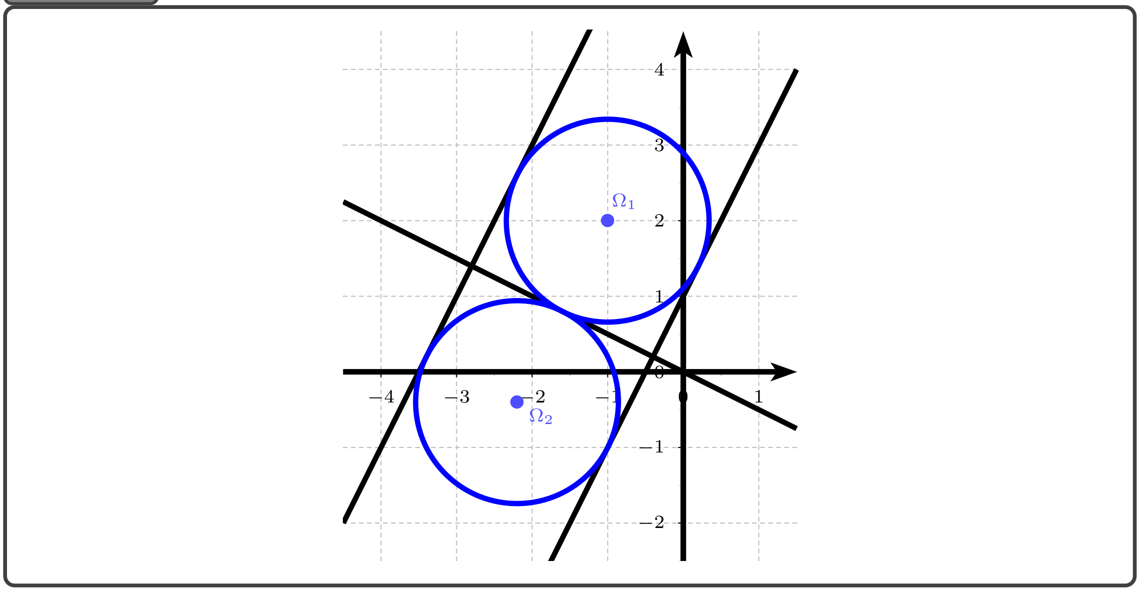
$$\frac{|b - 2a - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{|a + 2b|}{\sqrt{5}} \iff b - 2a - 7 = a + 2b \text{ ou } b - 2a - 7 = -a - 2b \iff 3a + b = -7 \text{ ou } -7 = a - 3b$$

On en déduit que les deux possibilités sont $\Omega_1(-1, 2)$ et $\Omega_2(-\dfrac{11}{5}, -\dfrac{2}{5})$.

On a $d(\Omega_1, D) = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = d(\Omega_2, D)$.

Ainsi il y a deux cercles solutions de rayon $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ et de centres Ω_1 ou Ω_2.

Figure .1



Corrigé de l'exercice 11

1. Soit F l'ensemble recherché. Soit $M(x, y)$ un point.

   On a $M \in F$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(1-\lambda^2)x + 2\lambda y + (\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$

   Ainsi $M \in F$ si et seulement si le polynôme $P(Z) = (1-x)Z^2 + 2(y-1)Z + x - 3$ a une racine réelle donc si et seulement si son discriminant est positif.

   Ledit discriminant vaut $(y-1)^2 + (x-1)(x-3)$, ainsi $M \in F$ si et seulement si $(y-1)^2 + (x-1)(x-3) \geqslant 0$.

   Or $(y-1)^2 + (x-1)(x-3) = (y-1)^2 + x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1$, ainsi $M \in F$ si et seulement si $(x-2)^2 + (y-1)^2 \geqslant 1$.

   F est ainsi l'extérieur du disque de centre $(2, 1)$ et de rayon 1.
2. Soit G l'ensemble recherché. Soit $M(x, y)$ un point.

   On a $M \in F$ si et seulement si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$\begin{cases} (1-\lambda^2)x + 2\lambda y + (\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0 \\ (1-\mu^2)x + 2\mu y + (\mu^2 - 2\mu - 3) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & 1-\mu^2 \\ 2\lambda & 2\mu \end{vmatrix}$$

   Ainsi $M \in F$ si et seulement si le polynôme $P(Z) = (1-x)Z^2 + 2(y-1)Z + x - 3$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ telles que $1 - \lambda^2 - \mu^2 + (\lambda\mu)^2 + 4\lambda\mu = 0$

   Non-nullité

   On peut bien supposer $x \neq 1$ car sinon le polynôme P serait non-nul et de degré inférieur ou égal à 1 et ne pourrait donc pas avoir deux racines distinctes.

   D'après les relations coefficients-racines, ceci est équivalent à l'existence de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda + \mu = -\dfrac{2(y-1)}{1-x}$, $\lambda\mu = \dfrac{x-3}{1-x}$ et $1 - (\lambda+\mu)^2 + (\lambda\mu)^2 + 6\lambda\mu = 0$ et $\lambda \neq \mu$

   En substituant on a alors

   $$\begin{aligned} 1 - \lambda^2 - \mu^2 + (\lambda\mu)^2 + 4\lambda\mu = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \left(-\frac{2(y-1)}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{1-x}\right) + 6\frac{x-3}{1-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 - 4(y-1)^2 + (x-3)^2 - 6(x-1)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 - 4(y-1)^2 + x^2 - 6x + 9 - 6x^2 + 24x - 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -4(y-1)^2 - 4x^2 + 16x - 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{aligned}$$

   On en déduit que G est inclus dans le cercle de centre $\Omega(2, 1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

   Si $M(x, y)$ appartient au cercle trouvé alors $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 > 1$ et ainsi P a bien deux racines distinctes.

Finalement G est le cercle de centre $\Omega(2,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 12

1. Les points M_2 et M_3 sont faciles à obtenir : M_2 a pour coordonnées $(x_0, -y_0)$ et M_3 a pour coordonnées $(-x_0, y_0)$.

   Le point M_1 est l'unique point tel que M_0M_1 et D sont perpendiculaires et le milieu du segment $[M_0M_1]$ appartient à D.

   Notons (x, y) les coordonnées de M_1, on a donc $\dfrac{y+y_0}{2} = \dfrac{x+x_0}{2} - 1$ et $\begin{vmatrix} x-x_0 & -1 \\ y-y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

   D'où $y + y_0 - x - x_0 + 2 = 0$ et $x - x_0 + y - y_0 = 0$, Ainsi $x = y_0 + 1$ $y = x_0 - 1$.

   M_1 est donc le point de coordonnées $(y_0 + 1, x_0 - 1)$
2. M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_2M_3}$ sont colinéaires donc si et seulement si $\begin{vmatrix} x_0-y_0-1 & -2x_0 \\ -y_0-x_0+1 & 2y_0 \end{vmatrix} = 0$

   On a

   $$\begin{vmatrix} x_0-y_0-1 & -2x_0 \\ -y_0-x_0+1 & 2y_0 \end{vmatrix} = 2y_0(x_0-y_0-1)-2x_0(x_0+y_0-1) = -2(y_0^2+y_0+x_0^2-x_0) = -2\left(\left(y_0+\frac{1}{2}\right)+\left(x_0-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)$$

   Ainsi M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si $\left(y_0+\dfrac{1}{2}\right)+\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire si et seulement si M_0 appartient au cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Corrigé de l'exercice 13

On suppose qu'une telle sphère existe.

Soit $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ le centre de la sphère d'équation $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$

Le centre d'une sphère dont l'intersection avec le plan d'équation $z = 0$ est le cercle d'équation $\begin{cases} x^2+y^2 = 9 \\ z = 0 \end{cases}$ est situé sur l'axe (Oz) (le centre se trouve sur la droite perpendiculaire au plan passant par le centre du cercle). On a donc $\alpha = \beta = 0$

Une équation de l'intersection de la sphère avec le plan d'équation $z = 0$ est le cercle d'équation $\begin{cases} x^2+y^2+\gamma^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$

On en déduit que $R^2 - \gamma^2 = 9$

Une équation de la sphère est donc $x^2 + y^2 + z^2 - 2\gamma z = R^2 - \gamma^2 = 9$.

On en déduit qu'alors une équation de l'intersection de la sphère avec le plan d'équation $z = 2$ est le cercle d'équations $\begin{cases} x^2+y^2+4-4\gamma = 9 \\ z = 0 \end{cases}$

Or, d'après l'énoncé, un système d'équations de ce cercle est $\begin{cases} x^2+y^2 = 25 \\ z = 2. \end{cases}$

Ainsi $9 + 4\gamma - 4 = 25$. D'où $\gamma = 5$.

On en déduit que si une sphère convient, elle admet pour équation $x^2 + y^2 + z^2 - 10z = 9$.

On vérifie aisément que cette sphère convient bien.

Corrigé de l'exercice 14

1. Un vecteur normal au plan P est $\overrightarrow{v}(2, 1, -1)$: il n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$ donc P et D ne sont pas orthogonaux.

2. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, ce sont donc des vecteurs du plan P' qui en définissent une base.

   Ainsi, si $M(x, y, z)$ est un point du plan, alors $M \in P'$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires donc si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

   En calculant le déterminant on en déduit que $M(x, y, z) \in P'$ si et seulement si $-3x + y - 5z + 7 = 0$. P' est donc le plan d'équation $-3x + y - 5z + 7 = 0$.

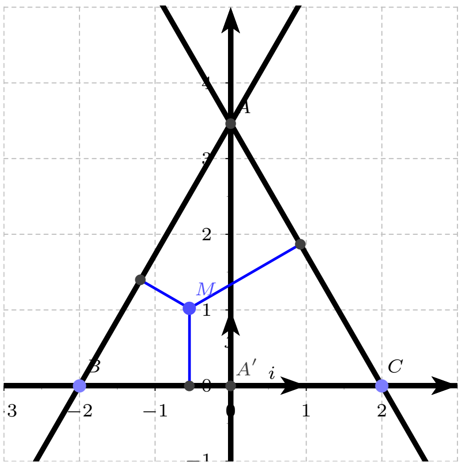
Corrigé de l'exercice 15

On pose $a = AB$.

On va se placer dans le repère orthonormé $(A', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec A' milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{A'C}}{A'C}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{\overrightarrow{A'A}}{A'A}$.

Dans ce repère, le triangle étant équilatéral, on a les coordonnées suivantes : $A\left(0, \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{a}{2}, 0\right)$ et $C\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$.

Figure .2



Dire que $M(x, y)$ est à l'intérieur du triangle signifie que M est situé du même côté que le troisième sommet du triangle par rapport à la droite passant par les deux autres sommets.

M est situé du même côté que A par rapport à (BC), ainsi $y \geqslant 0$. La distance de $M(x, y)$ à (BC) est alors y.

Une équation de la droite (AB) est $\sqrt{3}\left(x + \dfrac{a}{2}\right) - y = 0$.

En C, on a $\sqrt{3}\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\right) - 0 > 0$. Donc M est situé du même côté que C par rapport à (AB) si et seulement si $\sqrt{3}\left(x + \dfrac{a}{2}\right) - y \geqslant 0$.

La distance de M à (AB) est alors $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \dfrac{a}{2}\right) - \dfrac{1}{2}y$.

Une équation de la droite (AC) est $\sqrt{3}\left(x - \dfrac{a}{2}\right) + y = 0$.

En B, on a $-\sqrt{3}\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\right) + 0 < 0$. Donc M est situé du même côté que B par rapport à (AC) si et seulement si $\sqrt{3}\left(x - \dfrac{a}{2}\right) + y \leqslant 0$.

La distance de M à (AB) est alors $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{a}{2}\right) - \dfrac{1}{2}y$.

Ainsi, si M est un point variable décrivant l'intérieur de ce triangle, la somme des distances de M aux côtés de ce triangle vaut alors

$$y+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{1}{2}y\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

La somme des distances de M aux côtés de ce triangle est donc bien constante.

Corrigé de l'exercice 16

Une droite est entièrement déterminée par deux points, déterminons donc deux points de D'. Par calcul le droite D a pour représentation paramétrique $D=\left\{\left(-\frac{1}{4},z-\frac{3}{4},z\right)\ ,\ z\in\mathbb{R}\right\}$

Si on détermine le point d'intersection A de D et P, celui-ci appartient également à D'. Notons $A(x,y,z)$. On donc :

$$A(x,y,z)\in D\cap P \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=-\frac{1}{4}\\ y=z-\frac{3}{4}\\ x+2y-z-3=0\end{cases}$$

qui donne $A\left(-\frac{1}{4},4,\frac{19}{4}\right)$.

Le point $B\left(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4},0\right)$ est également un point de D, son symétrique $B'(x,y,z)$ par rapport à P

Le point B' est caractérisé par le fait que $\overrightarrow{BB'}$ est un vecteur normal à P donc colinéaire à $\overrightarrow{u}(1,2,-1)$ et que le milieu I de $[BB']$ appartient à P.

Puisque $\overrightarrow{u}(1,2,-1)\neq\overrightarrow{0}$ il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BB'}=\lambda u$ et $I\left(\frac{4x-1}{8},\frac{4y-3}{8},\frac{z}{2}\right)$ appartient à P.

On a donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x+\frac{1}{4}=\lambda\\ y+\frac{3}{4}=2\lambda\\ z=-\lambda\\ \frac{4x-1}{8}+2\frac{4y-3}{8}-\frac{z}{2}-3=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} x=\lambda-\frac{1}{4}\\ y=2\lambda-\frac{3}{4}\\ z=-\lambda\\ \lambda=\frac{19}{12}\end{cases}$$

qui donne $B'\left(\frac{4}{3},\frac{29}{12},-\frac{19}{12}\right)$.

On alors $D'=(AB')$.

Corrigé de l'exercice 17

Pour $\lambda\in[0,1]$ la droite D_λ passe par les points $A(0,\lambda)$ et $B(1-\lambda,0)$.

Il s'agit donc de la droite passant par $A(0,\lambda)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(\lambda)=\overrightarrow{AB}(1-\lambda,-\lambda)$.

$\overrightarrow{u}'(\lambda)$ a pour coordonnées $(-1,-1)$ et $\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -\lambda & -1\end{vmatrix}\neq 0$. Ainsi la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}')$ est libre.

On cherche une enveloppe de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in[0,1]}$ paramétrée par $A(\lambda)+c(\lambda)\overrightarrow{u}(\lambda)$.

Une telle enveloppe est alors telle que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}A(\lambda)+c(\lambda)\overrightarrow{u}(\lambda)$ et $\overrightarrow{u}(\lambda)$ sont colinéaires.

On cherche donc c telle que

$$\begin{vmatrix}0-c(\lambda)+c'(\lambda)(1-\lambda) & 1-\lambda\\ 1-c(\lambda)-c'(\lambda)\lambda & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

On a

$$\begin{vmatrix}0-c(\lambda)+c'(\lambda)(1-\lambda) & 1-\lambda\\ 1-c(\lambda)-c'(\lambda)\lambda & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-c(\lambda) & 1-\lambda\\ 1-c(\lambda) & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda c(\lambda)-(1-\lambda)(1-c(\lambda))=-1+\lambda+c(\lambda)$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in [0,1]$, $c(\lambda) = 1 - \lambda$.

Une enveloppe de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in[0,1]}$ est ainsi paramétrée par

$$\begin{cases} x(\lambda) & = (1-\lambda)^2 \\ y(\lambda) & = \lambda - (1-\lambda)\lambda = \lambda^2 \end{cases}$$

Il s'agit d'une partie de la parabole de directrice la droite d'équation $y + x = 0$ et de foyer le point $F(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Corrigé de l'exercice 18

On choisit de se placer dans le repère d'origine O, d'axe (Ox) dirigé et orienté par D, d'axe (Oy) dirigé et orienté par D'.

On paramètre la demi-droite D par l'abscisse $t \in \mathbb{R}_+^*$ du point M :

$t \neq 0$ car sinon le triangle serait d'aire nulle

Dans ce repère, $M(t)$ a donc pour coordonnées $(t, 0)$. L'aire du triangle OMM' est $\dfrac{OM \times OM'}{2}$ et vaut a^2 d'où $M'(t)$ a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{2a^2}{t}\right)$.

La droite $D_t = (M(t)M'(t))$ a alors pour vecteur directeur $\overrightarrow{u(t)}\left(-t, \dfrac{2a^2}{t}\right)$.

On a alors $\overrightarrow{u'(t)}\left(-1, \dfrac{-2a^2}{t^2}\right)$, d'où

$$\det(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{u'(t)}) = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ \dfrac{2a^2}{t} & \dfrac{-2a^2}{t^2} \end{vmatrix} = \frac{4a^2}{t} \neq 0$$

Soit (Γ) une enveloppe des droites (D_t).

Un point P appartient à (Γ) si et seulement si il existe t tel que la tangente en P à (Γ) est la droite (D_t), c'est-à-dire il existe une fonction λ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $P(t) = M(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u(t)}$ et $\dfrac{dP}{dt}$ et $\overrightarrow{u(t)}$ sont colinéaires.

Ceci équivaut à $\det\left(\dfrac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda(t)\overrightarrow{u'(t)}, \overrightarrow{u(t)}\right) = 0$.

On en déduit que

$$\lambda(t) = -\frac{\det\left(\dfrac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}, \overrightarrow{u(t)}\right)}{\det\left(\overrightarrow{u'(t)}, \overrightarrow{u(t)}\right)} = \frac{1}{2}$$

On obtient ainsi comme représentation paramétrique de (Γ)

$$\begin{cases} x(t) & = \dfrac{t}{2} \\ y(t) & = \dfrac{a^2}{t} \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}_+^*$$

On peut transformer cette écriture pour reconnaitre (Γ)

$$\exists t > 0, \begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{a^2}{t} \end{cases} \iff \exists t > 0, \begin{cases} t = 2x \\ y = \dfrac{a^2}{2x} \end{cases} \iff y = \frac{a^2}{2x} \text{ et } x > 0$$

Ainsi (Γ) est une branche d'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont D et D'.

Corrigé de l'exercice 19

On choisit de se placer dans le repère d'origine O la projection orthogonale de A sur D, d'axe $(Ox) = D$, d'axe $(Oy) = (OA)$. Notons a l'ordonnée de A, $a \neq 0$.

On paramètre la droite D par l'abscisse $t \in \mathbb{R}$ du point M : $M(t)$ a pour coordonnées $(t, 0)$. La normale D_t à $(AM(t))$ en $M(t)$ admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u(t)}(a, t)$ et passe par $M(t)$.

La famille $(\overrightarrow{u}(t), \overrightarrow{u}'(t))$ est bien libre car $a \neq 0$.

Soit (Γ) l'enveloppe des droites (D_t).

Un point P appartient à (Γ) si et seulement si $\exists t$ tel que la tangente en P à (Γ) est la droite (D_t), c'est-à-dire il existe une fonction λ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $P(t) = M(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u(t)}$ et $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ et $\overrightarrow{u(t)}$ sont colinéaires.

Ceci équivaut à $\det\left(\dfrac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda(t)\overrightarrow{u'(t)}, \overrightarrow{u(t)}\right) = 0$.

On en déduit que $\lambda(t) = -\dfrac{\det\left(\dfrac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}, \overrightarrow{u(t)}\right)}{\det\left(\overrightarrow{u'(t)}, \overrightarrow{u(t)}\right)}$.

Ainsi $\lambda(t) = \dfrac{t}{a}$. On obtient comme représentation paramétrique de (Γ) :

$$\begin{cases} x(t) &= 2t \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{a} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

On a facilement une équation de (Γ),

$$\begin{aligned} N(x, y) \in (\Gamma) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 2t \\ y &= \dfrac{t^2}{a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} t &= \dfrac{x}{2} \\ y &= \dfrac{x^2}{4a} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad y = \dfrac{x^2}{4a} \end{aligned}$$

(Γ) est donc la parabole de sommet O et d'axe focal (OA).

Corrigé de l'exercice 20

On procède par analyse-synthèse. Supposons qu'une telle sphère existe et notons $\Omega(x, y, z)$ son centre et $R > 0$ son rayon. On a donc les équations :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = R^2 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = R^2 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = R^2 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = R^2 \end{cases}$$

ce qui donne en particulier

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

puis, après simplifications

$$\begin{cases} -2x + 1 - 4y + 4 - 6y + 9 = -4x + 4 - 6y + 9 - 2z + 1 \\ -6y + 9 - 2y + 1 - 4z + 4 = -4x + 4 - 6y + 9 - 2z + 1 \\ -2x + 1 + 2z + 1 = -4x + 4 - 6y + 9 - 2z + 1 \end{cases}$$

qui est un système linéaire ayant pour unique solution $(1, 1, 1)$. On calcule ensuite $\Omega A = R = \sqrt{5}$. Ainsi, la sphère recherchée a pour équation :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

On vérifie ensuite aisément que les coordonnées des points A, B, C, D vérifient bien cette équation.

Corrigé de l'exercice 21

Si un cercle $(\mathcal{C}')$ de centre Ω et de rayon r est tangent à $(\mathcal{C})$ au point de contact M alors les deux rayons $[\Omega M]$ et $[AM]$ sont perpendiculaires à la tangente commune aux deux cercles. Ainsi les points Ω, M et A sont alignés.

Deux situations sont alors possibles :

— Les points sont alignés dans l'ordre A, M, Ω, i.e. Ω se trouve sur le segment $[A\Omega]$. On a alors $A\Omega = AM + M\Omega = r + 2$.

$(\mathcal{D})$ est tangente au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre Ω et de rayon r si et seulement si $d(\Omega, \mathcal{D}) = r$.

On va ainsi chercher les points $\Omega(x, y)$ tels que $A\Omega = 2 + d(\Omega, \mathcal{D})$.

Si Ω a pour coordonnées (x, y) alors $d(\Omega, \mathcal{D}) = |x|$ et $A\Omega = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
A\Omega = 2 + d(\Omega, \mathcal{D}) \quad & \Leftrightarrow \quad 2 + |x| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 + 4|x| + 4 = (x-1)^2 + y^2 \\
& \Leftrightarrow \quad x^2 + 4|x| + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
& \Leftrightarrow \quad 2x + 4|x| = y^2 - 3 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = \dfrac{y^2 - 3}{6} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x = \dfrac{3 - y^2}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

— Les points sont alignés dans l'ordre M, A, Ω i.e. A se trouve sur le segment $[M\Omega]$. On a alors $M\Omega = A\Omega + MA$, d'où $A\Omega = M\Omega - MA = r - 2$

$(\mathcal{D})$ est tangente au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre Ω et de rayon r si et seulement si $d(\Omega, \mathcal{D}) = r$.

On va ainsi chercher les points $\Omega(x, y)$ tels que $A\Omega = d(\Omega, \mathcal{D}) - 2$.

Si Ω a pour coordonnées (x, y) alors $d(\Omega, \mathcal{D}) = |x|$ et $A\Omega = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
A\Omega = d(\Omega, \mathcal{D}) - 2 \quad & \Leftrightarrow \quad |x| - 2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
& \Rightarrow \quad x^2 - 4|x| + 4 = (x-1)^2 + y^2 \\
& \Rightarrow \quad x^2 - 4|x| + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
& \Rightarrow \quad 2x - 4|x| = y^2 - 3 \\
& \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = \dfrac{3 - y^2}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x = \dfrac{y^2 - 3}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

— Les points sont alignés dans l'ordre M, Ω, A, i.e. Ω se trouve sur le segment $[MA]$. On a alors $MA = A\Omega + M\Omega$, d'où $A\Omega = MA - \Omega M = 2 - r$

$(\mathcal{D})$ est tangente au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre Ω et de rayon r si et seulement si $d(\Omega, \mathcal{D}) = r$.

On va ainsi chercher les points $\Omega(x, y)$ tels que $A\Omega = 2 - d(\Omega, \mathcal{D})$.

Si Ω a pour coordonnées (x, y) alors $d(\Omega, \mathcal{D}) = |x|$ et $A\Omega = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
A\Omega = 2 - d(\Omega, \mathcal{D}) \quad & \Leftrightarrow \quad 2 - |x| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\
& \Rightarrow \quad x^2 - 4|x| + 4 = (x-1)^2 + y^2 \\
& \Rightarrow \quad x^2 - 4|x| + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
& \Rightarrow \quad 2x - 4|x| = y^2 - 3 \\
& \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = \dfrac{3 - y^2}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x = \dfrac{y^2 - 3}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

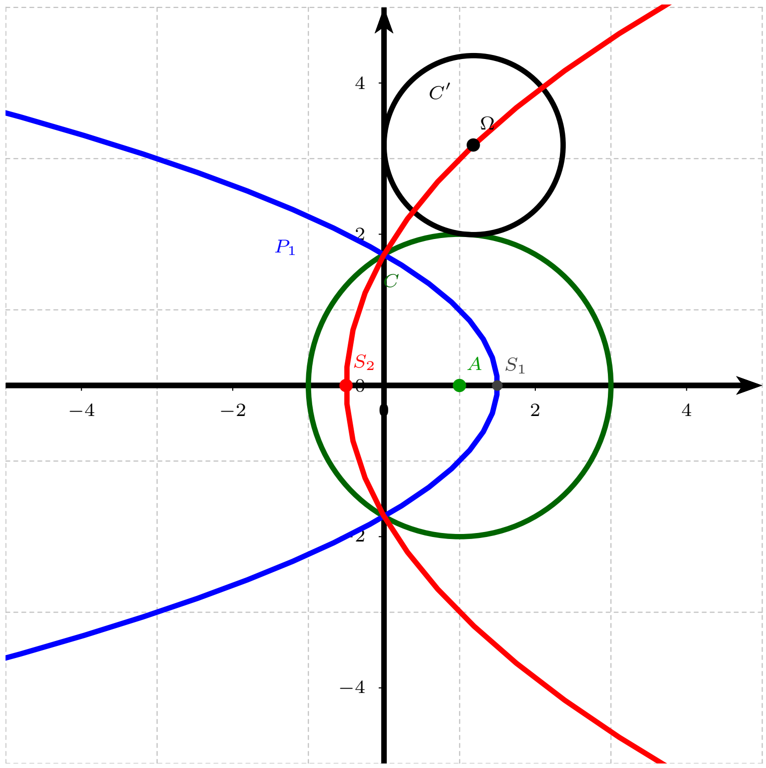
Réciproquement on a

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x = \dfrac{3-y^2}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x = \dfrac{y^2-3}{6} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A\Omega = 2 - d(\Omega, \mathcal{D}) quad \text{ ou } \quad A\Omega = d(\Omega, \mathcal{D}) - 2$$

Finalement le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $\Omega(x,y)$ et de rayon r est tangent à $(\mathcal{C})$ si et seulement si $x = \dfrac{3-y^2}{2}$ ou $x = \dfrac{y^2-3}{6}$

On reconnait la réunion de deux paraboles d'axe focal l'axe (Ox) et des sommets respectifs $S_1\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ et $S_2\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Figure .3



Corrigé de l'exercice 22

1. Soit M un point du plan, on a

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC} \rangle &= \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} \rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MC} \rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA} \rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AC} \rangle \\
&= -\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CM} \rangle - \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CA} \rangle
\end{aligned}$$

   Ainsi on a

   $$\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB} \rangle = -\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CM} \rangle - \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$$

2. On cherche à montrer que les hauteurs du triangle ABC s'intersectent en un unique point. Soit M un point du plan. M appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC si et seulement si $\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$.

De même M appartient à la hauteur issue de B dans le triangle ABC si et seulement si $\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CA}\rangle = 0$.

Puisque A, B et C ne sont pas alignés les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ ne sont pas colinéaires et donc les hauteurs issues de A et de B dans ABC ne sont pas parallèles (car leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires).

Elles s'intersectent donc en un unique point H.

D'après la question précédente on a alors $\langle\overrightarrow{CH},\overrightarrow{AB}\rangle = 0$, i.e. H appartient à la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Les trois hauteurs s'intersectent donc en un unique point H, l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A' le milieu du segment $[BC]$, on a donc $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} = \dfrac{\overrightarrow{CB}}{2}$.

   Ainsi, pour un point G on a

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{IG}$$

   On a alors

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IG}$$

   Ainsi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC}$ ce qui assure l'existence et l'unicité du point G.

   On a

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{CI}\overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AG}$$

   Ainsi $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. G appartient donc à la droite (AI), i.e. à la médiane issue de A dans ABC.

   De manière similaire G appartient donc à la médiane issue de B dans ABC et à la médiane issue de C dans ABC, c'est donc le centre de gravité de ABC.

4. L'égalité $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}$ définit P de manière unique. On cherche ici si P est un point particulier du triangle ABC.

   Comme O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC on a donc $OA = OB = OC$.

   On a

$$\begin{aligned}
\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BC}\rangle &= \langle\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP},\overrightarrow{BC}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},\overrightarrow{BC}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},\overrightarrow{BC}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\rangle \\
&= \langle\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\rangle \\
&= \|\overrightarrow{OC}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

   De manière similaire $\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CA}\rangle = 0$ et $\langle\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB}\rangle = 0$ et donc

$$\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}\rangle + \langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CA}\rangle + \langle\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB}\rangle = 0$$

   Ainsi P est l'orthocentre de (ABC), $P = H$

5. On a

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG}$$

   On a $\overrightarrow{OH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OG}$, ainsi O, H et G sont alignés.

Corrigé de l'exercice 23

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = (x-1)^2 + y^2 - \frac{1}{5}$$

$(\mathcal{C})$ est donc le cercle de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

A est à l'extérieur du disque de centre Ω et de rayon 2. Par A passent donc deux tangentes au cercle $(\mathcal{C})$ qui touchent $(\mathcal{C})$ en B et C.

Les triangles ΩAB et ΩAC sont alors rectangles en respectivement B et C. ΩA est l'hypoténuse de ces deux triangles. Ainsi B et C sont sur le cercle centré au milieu de ΩA et de rayon $\dfrac{\Omega A}{2}$, c'est-à-dire le cercle de centre $I\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{10}$. Les coordonnées de B et C vérifient alors les deux équations

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+\dfrac{4}{5}=0 \\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}=0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+\dfrac{4}{5}=0 \\ x^2-3x+y^2-3y+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y-\dfrac{6}{5}=0 \\ x^2-3x+y^2-3y+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{6}{5}-3y \\ 10y^2-\dfrac{6y}{5}-\dfrac{4}{25}=0 \end{cases}$$

D'où $(x,y)=\left(\dfrac{36}{25},-\dfrac{2}{25}\right)$ ou $(x,y)=\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{1}{5}\right)$. D'où $B\left(\dfrac{36}{25},-\dfrac{2}{25}\right)$ et $C\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{1}{5}\right)$. Les deux tangentes sont alors les droites d'équation $14x-7y=7$ et d'équation $11x-2y=16$.

Corrigé de l'exercice 24

1. La droite (MN) est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(x_N,\dfrac{x_N-2}{2}\right)$ et passe par le point $N(x_N,0)$. Ainsi (MN) admet pour représentation paramétrique
$$\left\{\left(x_N(1+t),\frac{x_N-2}{2}t\right)\ ,\ t\in\mathbb{R}\right\}=\{(x_N(1+2s),(x_N-2)s)\ ,\ s\in\mathbb{R}\}$$

2. Pour simplifier les écriture on va noter $t=x_N$.
Notons $\vec{u}(t)$ le vecteur de coordonnées $(2t,t-2)$. On a $\det(\overrightarrow{u'(t)},\overrightarrow{u(t)})\neq 0$
On cherche une enveloppe de la famille de droite $N(t,0)+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u(t)})$ paramétrée sous la forme $t\mapsto N(t,0)+\lambda(t)\overrightarrow{u(t)}$ où $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N(t,0)+\lambda(t)\overrightarrow{u(t)}\right)$ et $\overrightarrow{u(t)}$ sont colinéaires.
On doit avoir $\begin{vmatrix} 1+2\lambda(t) & 2t \\ \lambda(x) & t-2 \end{vmatrix}=0$, i.e. $\lambda(t)=\dfrac{t-2}{4}$.
Cette enveloppe est donc paramétrée par
$$\begin{cases} x(t)=t+2t\dfrac{t-2}{4}=\dfrac{t^2}{2} \\ y(t)=\dfrac{(t-2)^2}{4} \end{cases}\quad ,\ t\in\mathbb{R}$$

3. Soit M un point de coordonnées (x,y), on a alors, en notant E l'enveloppe
$$M(x,y)\in E\quad\Leftrightarrow\quad\exists t\in\mathbb{R},\ x=\frac{t^2}{2},\ y=\frac{(t-2)^2}{4}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M(x,y)\in E &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ 4y=2x-4t+4,\ 2x=t^2\\ &\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R},\ t=\frac{4-4y+2x}{4},\ 2x=\frac{(4-4y+2x)^2}{16}\\ &\Leftrightarrow 2x=\frac{(4-4y+2x)^2}{16}\end{aligned}$$

Ainsi l'enveloppe est la conique d'équation $x=\dfrac{(2-2y+x)^2}{8}$, il s'agit d'une parabole.

Corrigé de l'exercice 25

1. Soit O le centre du cercle, on se place dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA}$.
   Notons $a=OA$

   Dans ce repère le point A a pour coordonnées $(a,0)$. Un point $M(x,y)$ appartient à C si et seulement si $x^2+y^2=a^2$.

   Soit $M(a\cos(t),a\sin(t))$ un point du cercle avec $t\in[0,2\pi[$, la tangente T_t à C en M est normale à $\overrightarrow{OM}$ et passe par M, elle a donc pour équation $a\cos(t)x+a\sin(t)y=a^2$.

   Le projeté orthogonal H de A sur T_t est alors le point de coordonnées $\big(a(1-\cos^2(t)+\cos(t)),a(1-\cos(t))\sin(t)\big)$
2. Soit N un autre point de C de coordonnées $(a\cos(s),a\sin(s))$, l'aire du triangle MNH est alors égale à $\dfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MH})|$

   $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(a(\cos(t)-\cos(s)),a(\sin(t)-\sin(s))$ et $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\big(a(1-\cos^2(t)),-a\cos(t))\sin(t)\big)$

   Ainsi l'aire de MNH est égale à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MH})| &= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a(\cos(t)-\cos(s)) & a(1-\cos^2(t))\\ a(\sin(t)-\sin(s) & -a\cos(t))\sin(t)\end{vmatrix}\right|\\ &=\frac{a^2}{2}\left|\cos(s)\ \cos(t)\ \sin(t)-\sin(t)-\sin(s)\cos(t)^2+\sin(s)\right|\\ &=|\sin(t)\ (\sin(s)\ \sin(t)+\cos(s)\ \cos(t)-1)\,|\\ &=|\sin(t)|\times|\,(\cos(t-s)-1)\,|\end{aligned}$$

   On verra dans le chapitre sur les fonctions de plusieurs variables comment maximiser rigoureusement cette quantité.

   De manière intuitive on va chercher à maximiser $|\sin(t)|$ en prenant $t=\dfrac{\pi}{2}$ ou $t=-\dfrac{\pi}{2}$ puis on maximise $|\cos(t-s)-1|$ en prenant $t-s=\pi$, i.e. $s=\pi+t$.

   Ainsi l'aire sera maximale pour M de coordonnées $(0,a)$ et N de coordonnées $(0,-a)$ ou bien M de coordonnées $(0,-a)$ et N de coordonnées $(0,a)$.

Corrigé de l'exercice 26

Notons A le point de coordonnées $(2,0)$.

Si un cercle $(\mathcal{C}')$ de centre Ω et de rayon r est tangent à $(\mathcal{C})$ au point de contact M alors les deux rayons $[\Omega M]$ et $[AM]$ sont perpendiculaires à la tangente commune aux deux cercles. Ainsi les points Ω, M et A sont alignés.

Deux situations sont alors possibles :

— Les points sont alignés dans l'ordre A, M, Ω, i.e. Ω se trouve sur le segment $[A\Omega]$. On a alors $A\Omega=AM+M\Omega=r+1$.

  $(\mathcal{D})$ est tangente au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre Ω et de rayon r si et seulement si $d(\Omega,\mathcal{D})=r$.

  On va ainsi chercher les points $\Omega(x,y)$ tels que $A\Omega=1+d(\Omega,\mathcal{D})$.

Si Ω a pour coordonnées (x,y) alors $d(\Omega,\mathcal{D})=|x|$ et $A\Omega=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
A\Omega=1+d(\Omega,\mathcal{D}) \quad &\Leftrightarrow \quad 1+|x|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2|x|+1=(x-2)^2+y^2\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2|x|+1=x^2-4x+4+y^2\\
&\Leftrightarrow \quad 4x+2|x|=y^2+3\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\geqslant 0\\ x=\dfrac{y^2+3}{6}\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x\leqslant 0\\ x=\dfrac{3+y^2}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

Remarquons que la situation $x\leqslant 0$ et $x=\dfrac{3+y^2}{2}$ n'est pas possible, on a donc $x=\dfrac{y^2+3}{6}$

— Les points sont alignés dans l'ordre M, A, Ω i.e. A se trouve sur le segment $[M\Omega]$. On a alors $M\Omega=A\Omega+MA$, d'où $A\Omega=M\Omega-MA=r-1$

$(\mathcal{D})$ est tangente au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre Ω et de rayon r si et seulement si $d(\Omega,\mathcal{D})=r$.

On va ainsi chercher les points $\Omega(x,y)$ tels que $A\Omega=d(\Omega,\mathcal{D})-1$.

Si Ω a pour coordonnées (x,y) alors $d(\Omega,\mathcal{D})=|x|$ et $A\Omega=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
A\Omega=d(\Omega,\mathcal{D})-1 \quad &\Leftrightarrow \quad |x|-1=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\\
&\Rightarrow \quad x^2-2|x|+1=(x-2)^2+y^2\\
&\Rightarrow \quad x^2-2|x|+1=x^2-4x+4+y^2\\
&\Rightarrow \quad 4x-2|x|=y^2+3\\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} x\geqslant 0\\ x=\dfrac{3+y^2}{2}\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x\leqslant 0\\ x=\dfrac{y^2+3}{6}\end{cases}
\end{aligned}$$

Là encore la situation $x\leqslant 0$ et $x=\dfrac{y^2+3}{6}$ n'est pas possible, on a donc $x=\dfrac{y^2+3}{2}$

Réciproquement on a

$$\begin{cases} x\geqslant 0\\ x=\dfrac{3+y^2}{2}\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A\Omega=d(\Omega,\mathcal{D})-1$$

— Les points sont alignés dans l'ordre M, Ω, A, i.e. Ω se trouve sur le segment $[MA]$. On a alors $MA=A\Omega+M\Omega$, d'où $A\Omega=MA-\Omega M=1-r$

$(\mathcal{D})$ est tangente au cercle $(\mathcal{C}')$ de centre Ω et de rayon r si et seulement si $d(\Omega,\mathcal{D})=r$.

On va ainsi chercher les points $\Omega(x,y)$ tels que $A\Omega=2-d(\Omega,\mathcal{D})$.

Si Ω a pour coordonnées (x,y) alors $d(\Omega,\mathcal{D})=|x|$ et $A\Omega=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
A\Omega=2-d(\Omega,\mathcal{D}) \quad &\Leftrightarrow \quad 1-|x|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}\\
&\Rightarrow \quad x^2-2|x|+1=(x-2)^2+y^2\\
&\Rightarrow \quad x^2-2|x|+1=x^2-4x+4+y^2\\
&\Rightarrow \quad 4x-2|x|=y^2+3\\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} x\geqslant 0\\ x=\dfrac{3+y^2}{2}\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x\leqslant 0\\ x=\dfrac{y^2+3}{6}\end{cases}
\end{aligned}$$

La situation $x\leqslant 0$ et $x=\dfrac{y^2+3}{6}$ n'est pas possible, si $x\geqslant 0$ alors $x=\dfrac{3+y^2}{2}\geqslant 1$, d'où $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=1-|x|<0$ ce qui est également impossible.

Finalement le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $\Omega(x,y)$ et de rayon r est tangent à $(\mathcal{C})$ si et seulement si $x=\dfrac{y^2+3}{2}$ ou $x=\dfrac{y^2+3}{6}$

On reconnait la réunion de deux paraboles d'axe focal l'axe (Ox) et des sommets respectifs $S_1\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ et $S_2\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

Corrigé de l'exercice 27

1. La droite parallèle à l'axe des abscisse passant par $C(t)$ passe également par le point $A(t)$ de coordonnées $(0,\sin(t))$. On va déterminer l'image de $A(t)$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(OC(t))$

   La symétrie orthogonale par rapport à la droite $(OC(t))$ est la réflexion d'angle $2t$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}$

   On a
$$\begin{pmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ \sin(2t) & -\cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \sin(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(t)\sin(2t)\\ -(\sin(t)\cos(2t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos(t)\sin(t)^2\\ \sin(t)^3-\cos(t)^2\sin(t)\end{pmatrix}$$

   Ainsi l'image $\tilde{A}(t)$ de $A(t)$ par la symétrie orthogonale par rapport à la droite $(OC(t))$ est le point de coordonnées $\left(2\cos(t)\sin(t)^2,\sin(t)^3-\cos(t)^2\sin(t)\right)$.

   La droite D_t est la droite passant par $C(t)$ et $\tilde{A}(t)$, elle est ainsi dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(\cos(t)\left(2\sin(t)^2-1\right),\sin(t)^3-\cos(t)^2\sin(t)-\sin(t)\right)=\left(\cos(t)\left(2\sin(t)^2-1\right),-2\cos(t)^2\sin(t)\right)$

   Puisque $\cos(t)\neq 0$ on prend comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ de coordonnées $\left(2\sin(t)^2-1,-2\cos(t)\sin(t)\right)$.

   La droite D_t a donc pour représentation paramétrique
$$\left\{\left(\cos(t)+\lambda\left(2\sin(t)^2-1\right),\sin(t)-2\lambda\cos(t)\sin(t)\right)\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

2. Pour $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $u'(t)$ a pour coordonnées $\left(4\cos(t)\sin(t),2\sin^2(t)-2\cos^2(t)\right)$
$$\begin{vmatrix}\left(2\sin(t)^2-1\right) & 4\cos(t)\sin(t)\\ -2\cos(t)\sin(t) & 2\sin^2(t)-2\cos^2(t)\end{vmatrix}=2$$

   Ainsi la famille de droites $(D_t)_{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ admet une enveloppe.

   On cherche cette enveloppe sous la forme $C(t)+\lambda(t)\overrightarrow{u}(t)$ où λ est tel que $C'(t)+\lambda(t)\overrightarrow{u}'(t)$ et $\overrightarrow{u}(t)$ soient colinéaires.

   On a ainsi $\det(C'(t)+\lambda(t)\overrightarrow{u}'(t),\overrightarrow{u}(t))=0$, d'où
$$\lambda(t)=-\frac{\det(C'(t),\overrightarrow{u}(t))}{\det(\overrightarrow{u}'(t),\overrightarrow{u}(t))}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-\sin(t) & 2\sin(t)^2-1\\ \cos(t) & -2\cos(t)\sin(t)\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\cos(t)$$

   L'enveloppe des droites $(D_t)_{t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est ainsi la courbe paramétrée par
$$\begin{cases}x(t) & =\sin(t)^2\cos(t)+\dfrac{\cos(t)}{2}\\ y(t) & =\sin(t)^3\end{cases}$$

3. On étudie la courbe paramétrée ainsi définie

   x est paire et y est impaire, on restreint notre étude à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et on obtiendra le support complet par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$x'(t) = \frac{3\sin(t)}{2}(1 - 2\sin(t)^2) = 3\sin(t)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(t)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(t)\right)$$

$$y'(t) = 3\cos(t)\sin(t)^2 \geqslant 0$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\nearrow$	1
$y'(t)$	0		$+$		0

On a un point singulier au paramètre 0.

$$x(t) \underset{t \to 0}{=} \sin(t)^2\cos(t) + \frac{\cos(t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t^2 - \frac{13}{16}t^4 + o(t^4)$$

$$y(t) \underset{t \to 0}{=} t^3 + o(t^4)$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \to 0}{=} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(t^3)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre donc le point de paramètre 0 est donc un point de rebroussement de première espèce. La tangente en ce point est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

On obtient le tracé suivant

Figure .4 – Tracé de l'enveloppe